

APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
AU CALCUL DES TURBO-ALTERNATEURS

Christian NOWAK, Assistant à l'Université de Liège

Institut d'Electricité Montefiore, Service de Construction
des Machines Electriques - Bâtiment B28 au SART TILMAN
B-4000 LIEGE

RESUME

Le constructeur de machines électriques, lorsqu'il se trouve confronté avec la méthode des éléments finis appliquée au calcul du flux dans les turbo-alternateurs, se heurte en général aux problèmes suivants : outre le fait qu'il doit assimiler le principe de la méthode de résolution par éléments finis, il doit aussi en supporter certains inconvénients : génération d'un maillage particulièrement complexe, détermination de la répartition des densités de courant, interprétation des résultats.

On a mis au point un programme qui intègre le calcul du flux proprement-dit dans un ensemble plus vaste, capable d'étudier automatiquement un turbo-alternateur quelconque, moyennant l'introduction d'un nombre minimal de données fondamentales, et capable d'interpréter les résultats de façon parlante.

L'utilisation de ce programme n'exige pas la connaissance de la méthode des éléments finis, ce qui en constitue un avantage, d'autant plus que le rapport entre le coût des calculs programmés et la précision des résultats est assez favorable.

1. INTRODUCTION

Dans le domaine du calcul des turbo-alternateurs, l'étude bidimensionnelle de la répartition du flux par la méthode des éléments finis nécessite l'introduction d'un nombre assez considérable de données, à savoir :

- la génération d'un maillage comportant la description conventionnelle des éléments et la définition des nombreuses coordonnées qui y sont associées ;
- la définition des zones parcourues par du courant ;
- la définition des conditions aux limites.

La présence d'encoques, de cales d'encoques, des conducteurs, et éventuellement d'une sous-encoche de ventilation rend la discrétisation d'un turbo-alternateur particulièrement complexe.

De plus, si l'on veut étudier le fonctionnement en charge, il s'impose de calculer la répartition des courants

dans chaque encoche, et cette répartition doit être conforme au diagramme vectoriel caractérisant le fonctionnement.

Par raison de symétrie, on n'étudiera qu'une partie de machine, correspondant à un demi pas polaire (à vide), ou à un pas polaire (en charge) ; dans ce dernier cas, il est de plus nécessaire de définir des conditions de périodicité entre deux axes successifs, en relation avec le programme de résolution.

À l'issue du calcul, on obtient la valeur du potentiel vecteur et de l'induction en chaque point défini précédemment, et en des points d'intégration situés dans chaque élément. Ces résultats, très nombreux, sont assez difficiles à interpréter, c'est pourquoi il est intéressant de les manipuler et de les rendre accessibles au constructeur de machines électriques ou à l'électrotechnicien.

Comme on le voit, l'application de la méthode des éléments finis impose à l'utilisateur non seulement de prendre connaissance du principe de la méthode et de la façon dont elle a été programmée, mais également de créer, manipuler et gérer de volumineux fichiers de données et de résultats.

Le programme mis au point permet d'éliminer cette contrainte, car il effectue l'étude automatique d'un turbo-alternateur quelconque, moyennant l'introduction d'un nombre minimal de données familières à l'utilisateur qui, de ce fait, n'a pas à assimiler la méthode des éléments finis, ni les programmes qui lui sont associés.

2. LA GENERATION D'UN MAILLAGE

Générer un maillage associé à une coupe faite perpendiculairement à l'axe d'un turbo-alternateur peut s'envisager de plusieurs manières.

Une méthode particulièrement séduisante, à première vue, serait de calculer un maillage susceptible de se modifier dynamiquement au cours du processus de résolution, par division de certains éléments, afin de diminuer les erreurs locales de discrétisation¹. Cependant, comme la géométrie d'un turbo-alternateur est très complexe, un nombre de noeuds assez important est nécessaire dès le départ, pour définir le maillage primaire, et, au cours du calcul itératif, un raffinement local du réseau de noeuds ne ferait qu'augmenter le nombre de ceux-ci. Le temps de calcul par la méthode des éléments finis est proportionnel au nombre de noeuds et au carré de la largeur de front (grandeur caractéristique de la méthode frontale de résolution, dépendant du nombre de noeuds et de l'organisation du découpage en éléments) ; on risquerait donc de se trouver assez vite limité par le temps de calcul, ce qui enlève à cette méthode une partie de son intérêt, bien que la précision que l'on peut en attendre soit optimale.

De plus, si ce procédé peut s'appliquer facilement à des éléments triangulaires du premier degré, il se complique singulièrement avec des éléments à quatre côtés, et devient pratiquement inapplicable à des éléments du second degré.

La géométrie d'un turbo-alternateur se prête bien à l'emploi d'éléments à quatre côtés ; pour obtenir une meilleure précision, on a retenu l'élément quadrilatéral iso-paramétrique du second degré. Cependant, l'emploi d'éléments triangulaires s'est parfois avéré nécessaire.

Une autre méthode de génération -celle qui a été retenue- consiste à créer un maillage fixe, respectant toutefois certaines contraintes.

On sait qu'en fonctionnement nominal, l'allure des lignes de flux dans les noyaux statorique et rotorique, de même que dans les pôles du rotor, est assez régulière. Par contre, il n'en va pas de même dans les autres parties de la machine : entrefer, et surtout encoches et dents statoriques et rotoriques. On peut s'attendre raisonnablement à ce qu'un maillage généré dynamiquement par la première méthode envisagée, comporte un réseau large dans les zones où le trajet du flux est régulier, et où les erreurs de discrétisation sont minimales, et un réseau serré dans les autres parties.

On impose donc au maillage fixe, comme première contrainte, de comporter ces deux types de réseaux dans les zones appropriées.

De plus, pour éviter les erreurs de discrétisation au passage entre deux milieux de caractéristiques différentes (magnétique et non magnétique), on prévoit de placer une mince couche d'éléments réguliers à la limite entre ces deux milieux, à savoir en bordure de l'entrefer et à la base des encoches.

Cette distinction entre zones où la densité d'éléments est différente s'effectue automatiquement selon les remarques précédentes ; toutefois, l'utilisateur peut décider du nombre de couches nécessaires pour construire la structure : un code très simple, entré comme donnée, lui est proportionnel.

A titre d'exemple, la figure 1 représente un maillage destiné à l'étude d'un turbo-alternateur bipolaire, en charge (959 noeuds, 300 éléments) ; le nombre de couches nécessaires pour le discrétiser, égal à 8, avait été imposé comme donnée.

La figure 2 représente un maillage destiné à l'étude du même turbo-alternateur, à vide (1072 noeuds, 337 éléments) le nombre de couches plus important, égal à 19, avait été choisi au préalable.

Dans le premier cas comme dans le second, mis à part le fait qu'il s'agit de cas de charge différents, la seule donnée qui les distingue est le code proportionnel au nombre de couches introduit par l'utilisateur.

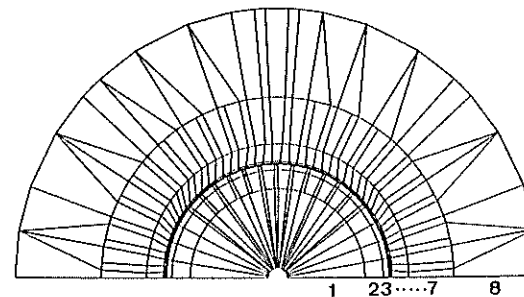


Figure 1

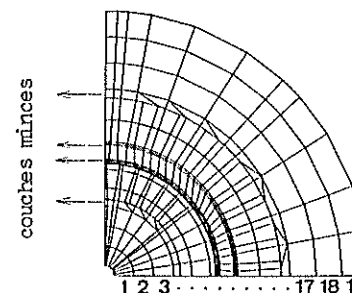


Figure 2

On remarquera dans les deux cas que le réseau d'éléments est plus large dans les noyaux et dans les pôles ; dans le second cas, une couche mince d'éléments a été intercalée en bordure de l'entrefer et à la base des encoches, sur décision de l'utilisateur. Celui-ci reste libre de multiplier le nombre de couches, tout en gardant à l'esprit que l'augmentation du nombre d'éléments conduit à une précision plus grande, au détriment de la rapidité du calcul.

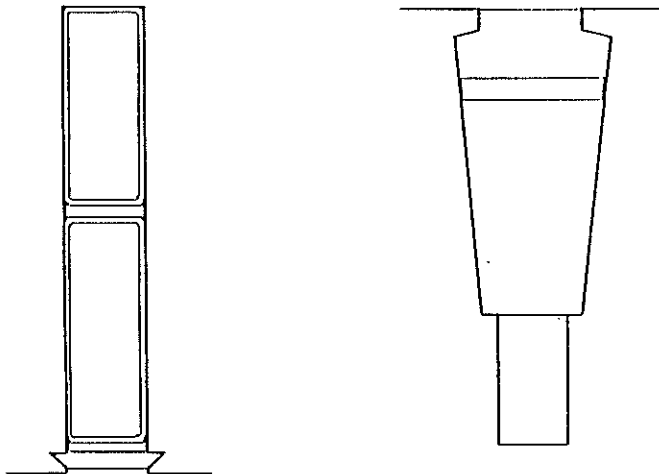
Une deuxième contrainte que devra respecter le maillage est imposée par des considérations de symétrie : en marche à vide, le flux se répartit symétriquement par rapport aux axes polaires du rotor : pour des raisons évidentes d'économie de temps de calcul, il suffira d'étudier, dans ce cas, une fraction de machine égale à $1/4P$, P étant le nombre de paires de pôles.

En charge par contre, le flux ne se répartit pas symétriquement par rapport aux axes polaires du rotor ; on pourra cependant n'étudier qu'une fraction de machine égale à $1/2P$, à condition d'imposer, dans le programme de résolu-

tion, des conditions de périodicité entre deux axes polaires successifs ; ces conditions sont telles que le potentiel vecteur en un point d'un axe polaire, est égal, au signe près, au potentiel vecteur du point correspondant sur l'axe polaire suivant.

Le programme de discrétisation prend en charge automatiquement cette deuxième contrainte, à partir de deux données : une variable codée caractérisant le cas de charge, et le nombre de paires de pôles. Les figures 1 et 2 illustrent deux discrétisations relatives à un turbo-alternateur bipolaire ; conformément à ce qui vient d'être dit, la figure 1 correspond à l'étude d'un cas en charge, et seule une demi-machine est étudiée ; la figure 2 correspond à l'étude d'un cas à vide, et un quart de machine suffit à sa représentation.

Une troisième contrainte qu'il importe de respecter est le caractère universel du programme de génération : il doit être capable de générer le maillage correspondant à un turbo-alternateur quelconque, quels que soient son encochage statorique ou rotorique, et son nombre de pôles. Dans l'application présentée ici, on n'a envisagé que des géométries d'encoches correspondant à des turbo-alternateurs construits à l'heure actuelle (figure 3) ; cependant, vu la structure modulaire du programme, il ne se poserait pas de difficulté particulière à implanter d'autres géométries.



Encoche statorique
(vue simplifiée)

Encoche rotorique
(vue simplifiée)

Figure 3

Le maillage correspondant au stator est calculé indépendamment du maillage du rotor ; ces deux parties sont raccordées au niveau de l'entrefer par un réseau particulier ; à cet effet, le nombre de noeuds créés au niveau de l'alésage statorique est égal au nombre de noeuds créés à la périphérie du rotor ; cela entraîne comme conséquence que la structure rotorique peut occuper une position quelconque par rapport à la structure statorique ; cette possibilité sera exploitée lors de l'étude d'un cas en charge, comme on le verra plus loin.

Pour garder au programme un caractère général, on a été amené à prévoir la génération d'une série de sous-structures de type standard : par exemple, des sous-structures destinées à former le stator, composées de 12, 3 ou 1 élément au niveau de l'alésage statorique ; de même, des sous-structures pour la partie dentée du rotor, composées de 12, 3 ou 1 élément à la périphérie du rotor, et enfin des sous-structures destinées à former les pôles du rotor, et comportant 4, 2 ou 1 élément en largeur à la périphérie du pôle.

Chacune de ces sous-structures se caractérise par un nombre de couches variable (choisi par l'utilisateur, comme cela a été dit plus haut) ; leur génération est programmée pour respecter la première contrainte : la densité des éléments est différente selon qu'il s'agit d'un noyau et d'un pôle ou d'une partie dentée.

Ces sous-structures doivent se raccorder entre elles : leurs frontières communes comportent donc le même nombre de noeuds et d'éléments ; la numérotation conventionnelle des éléments dans chacune de ces sous-structures conduit à une largeur de front constante et minimale, et le passage d'une sous-structure à l'autre ne cause pas l'augmentation de ce paramètre.

Le programme de discrétisation détermine la répartition optimale des sous-structures, et un sous-programme d'assemblage procède à la jonction de celles-ci.

La figure 4 montre une vue éclatée du maillage de la figure 2. On peut y constater notamment que le stator se compose respectivement de 2 sous-structures standard à 6 éléments en largeur le long de l'alésage, de 3 sous-structures standard à 3 éléments en largeur, et de 4 sous-structures standard à 1 élément en largeur.

Bien entendu, les différents matériaux qui constituent les éléments sont codés conventionnellement, de même que les éléments parcourus par du courant.

A l'issue du processus de génération, on obtient une matrice des coordonnées, et une matrice de description conventionnelle des éléments.

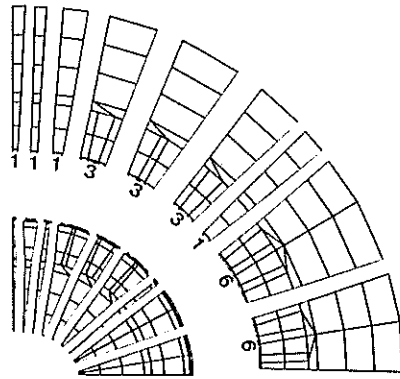


Figure 4

3. LE CALCUL DES DENSITES DE COURANT

Le programme de résolution demande d'associer la densité de courant correspondant à chaque élément parcouru par du courant. Lors de l'étude d'un cas à vide, cela se réduit au calcul des densités agissant dans les encoches rotoriques, ce qui ne présente pas de difficulté. Pour l'étude d'un cas en charge, il est nécessaire de déterminer la densité de courant agissant dans chaque encoche statorique et rotorique.

Ce genre de calcul serait particulièrement fastidieux à faire manuellement, c'est pourquoi il a été nécessaire de l'automatiser et de le généraliser.

On a prévu d'étudier les bobinages statoriques que l'on rencontre en général dans les turbo-alternateurs d'aujourd'hui : bobinages hexaphasés à deux couches, à pas raccourci et à nombre entier d'encoches par paire de pôles et par phase d'enroulement.

Comme des bobinages statoriques dodécaphasés sont actuellement étudiés et ont déjà été réalisés, on a également intégré cette possibilité dans le programme. Grâce à la structure modulaire de celui-ci, il ne se poserait d'ailleurs pas de difficulté spéciale à intégrer le calcul d'autres types de bobinages.

On résout le diagramme vectoriel du fonctionnement nominal de la machine, pour connaître l'angle α existant, en charge, entre la force magnétomotrice d'excitation et la f.m.m. de réaction d'induit (figure 5).

On détermine l'angle α' , compté en nombre entier de demi-pas dentaires, le plus proche possible de α . Après avoir calculé quelques grandeurs caractéristiques du bobinage (nombre d'encoches par pôle et par phase, raccourcissement du pas compté en nombre d'encoches,...),

on oriente l'étoile vectorielle des courants d'encoches de telle façon que la répartition de la f.m.m. de réaction d'induit le long de l'entrefer présente son maximum à un angle α' de l'axe origine, celui-ci coïncidant avec l'axe d'un pôle Nord rotorique.

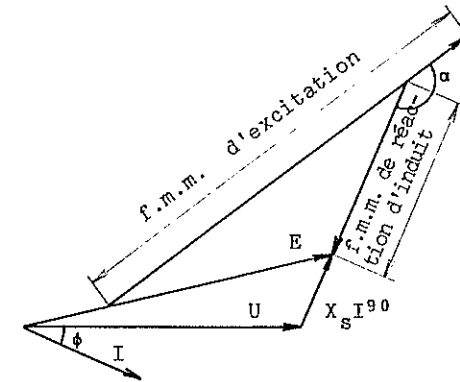


Figure 5

Si $\epsilon = \alpha - \alpha'$, et si l'on fait effectuer une rotation d'un angle égal à ϵ à la structure rotorique, l'angle existant entre les f.m.m. sera effectivement égal à α . Cette rotation d'un angle ϵ très petit est rendue possible grâce au fait que le stator et le rotor sont discrétisés indépendamment.

- \overline{OA} : f.m.m. d'excitation
- \overline{OB} : f.m.m. résultante
- \overline{OC} : f.m.m. de réaction d'induit

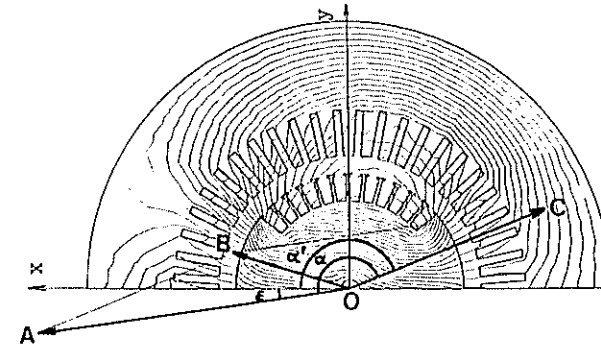


Figure 6

La figure 6 illustre un cas en charge étudié, pour lequel l'angle de rotation ϵ était de 0,78 degrés. Le diagramme vectoriel superposé à la répartition du flux n'est pas représenté à l'échelle, certains angles ayant été exagérés pour la clarté du dessin.

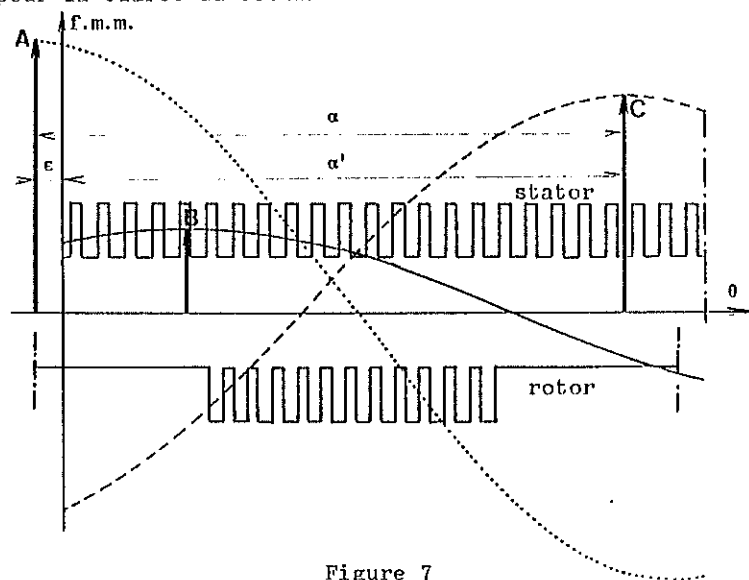


Figure 7

La figure 7 donne une représentation développée de l'entrefer de cette machine, et le diagramme de répartition de l'onde fondamentale des différentes forces magnétomotrices.

Pour terminer, les densités de courant sont classées dans un vecteur, dans l'ordre où les éléments parcourus par du courant seront rencontrés lors du calcul.

4. LES FICHIERS DE DONNEES

En plus des coordonnées des noeuds, de la description des éléments, des densités de courant, il faut également fournir au programme de résolution la liste des noeuds participant aux conditions aux limites et aux conditions de périodicité. Une manipulation de la matrice des coordonnées et de la matrice des éléments permet de mettre ces noeuds en évidence.

Toutes les données sont maintenant acquises ; il faut encore les transmettre sous une forme bien déterminée au programme de résolution : pour éviter une intervention de l'utilisateur, les données sont enregistrées automatique-

ment sur fichiers séquentiels, sous la forme requise.

5. LE PROGRAMME DE RESOLUTION

La méthode de résolution choisie est la méthode frontale².

Cette méthode minimise l'occupation en mémoire centrale de l'ordinateur, les opérations arithmétiques, et l'utilisation des périphériques.

Il était important, en prévision de cette méthode, de générer le maillage en optimisant la numérotation des éléments successifs : cette numérotation est étroitement liée à ce que l'on appelle la largeur de front. Cette grandeur, caractéristique de la méthode frontale, représente le nombre d'équations traitées simultanément par le processus de résolution, donc le nombre de noeuds examinés simultanément à un instant donné, et qui sont strictement nécessaires pour tenir compte des conditions de continuité entre éléments et des conditions aux limites et de périodicité.

Lorsque le programme de résolution passe en revue les éléments successifs dans l'ordre de leur numérotation, la largeur de front évolue rapidement jusqu'à une valeur constante, et diminue lorsque les derniers éléments sont traités.

La numérotation des éléments réalisée par le programme de génération de maillage rend cette valeur constante de la largeur de front minimale, et de ce fait optimale au point de vue occupation mémoire et temps de calcul.

Pour tenir compte du caractère non linéaire de la caractéristique magnétique du matériau employé, il a été nécessaire de résoudre le problème de façon itérative, ce qui amène à définir la méthode pas à pas d'Euler (par incrémentation de la charge), avec corrections de Wilson et Murray à chaque pas, et corrections de Newton-Raphson au dernier pas³.

Ces méthodes combinées ont été choisies non seulement parce qu'elles permettent une bonne convergence, mais aussi parce qu'elles peuvent être directement utilisables pour établir la courbe à vide de la machine. Celle-ci donne l'évolution du flux dans l'entrefer de la machine en fonction du courant inducteur, et est essentiellement non linéaire. Comme le flux peut se déduire du potentiel vecteur, on peut aussi parler d'évolution du potentiel vecteur en fonction de la densité de courant rotorique.

Soit figure 8 l'évolution qualitative du potentiel vecteur en fonction de la densité de courant pour un degré de liberté.

La méthode pas à pas résout une forme incrémentale de l'équation caractéristique $\{S\}\Delta = Q$, où Δ est le vecteur inconnu des potentiels, Q le vecteur de charge (fonction des densités de courant), et $\{S\}$ la matrice caractéristi-

que du système.

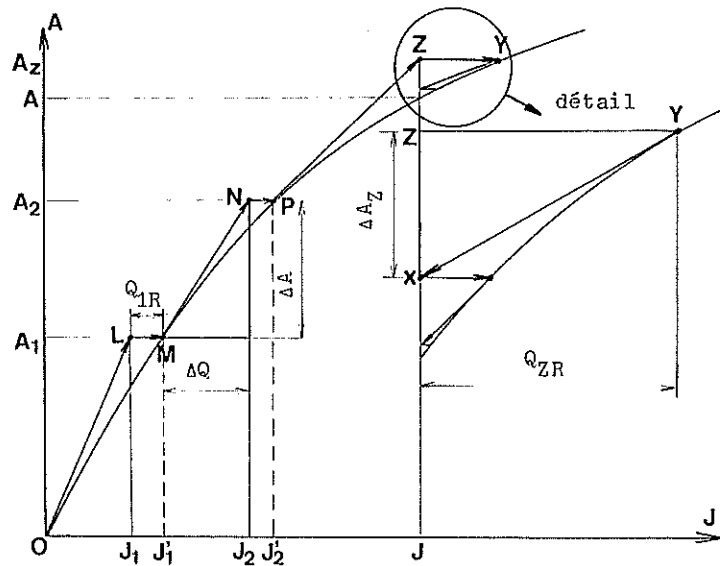


Figure 8

Au premier pas, on applique la charge $\bar{Q}_1 = f(J_1)$, et on résout l'équation caractéristique $\{S_0\}\bar{A}_1 = \bar{Q}_1$, ce qui donne le point L, situé en dehors de la courbe réelle, vu la non linéarité de la caractéristique magnétique du matériau. Avant d'incrémenter la charge, on rabat le point L en M sur la courbe, par une correction de Wilson et Murray, qui consiste à calculer la matrice $\{S_L\}$ au point L, compte tenu de la perméabilité magnétique pour un potentiel \bar{A}_1 , et à résoudre l'équation $\{S_L\}\bar{A}_1 = \bar{Q}_1$, où \bar{Q}_1 , charge correspondant à J_1 , est cette fois l'inconnue. On calcule la charge résiduelle $\bar{Q}_{1R} = \bar{Q}_1 - \bar{Q}_1$, qui détermine le point M (\bar{A}_1, J_1') ; on calcule le flux ϕ_1 à partir de \bar{A}_1 , et l'on obtient ainsi un premier point $^1(\phi_1, J_1')$ de la courbe $\phi = f(J)$.

On incrémente la charge compte tenu de \bar{Q}_{1R} , c'est-à-dire de J_1' à J_2 , et pour passer de M en N, on résout l'équation caractéristique sous forme incrémentale $\{S'\}\Delta\bar{A} = \Delta\bar{Q}$, où $\Delta\bar{Q}$ est fonction de $J_2 - J_1'$, et où la matrice $\{S'\}$ est calculée à partir de la matrice $\{S_L\}$ et de l'état au point précédent.

On obtient ainsi le point N (\bar{A}_2, J_2), où $\bar{A}_2 = \bar{A}_1 + \Delta\bar{A}$. En appliquant à nouveau une correction de Wilson et Murray, on rabat le point N en P, d'où l'on déduit un second point (ϕ_2, J_2') de la courbe à vide.

On procède de même jusqu'au dernier incrément, qui définit

le point Z (\bar{A}_2, J) qui lui aussi se trouve en dehors de la courbe réelle, et ne coïncide pas avec le point de fonctionnement nominal (\bar{A}, J).

On peut appliquer une correction du type précédent, qui rabat le point Z en Y sur la courbe, et permet d'évaluer la charge résiduelle \bar{Q}_{ZR} .

La méthode de Newton-Raphson permet de se rapprocher du point solution en prenant un incrément de charge égal à la charge résiduelle \bar{Q}_{ZR} changée de signe, et en résolvant l'équation caractéristique $\{S''\}\Delta\bar{A}_2 = -\bar{Q}_{ZR}$, ce qui donne le point X plus proche de la solution.

Quelques corrections successives permettent d'arriver finalement à la solution (\bar{A}, J) correspondant au fonctionnement nominal.

Comme on le voit, le processus de résolution choisi (méthode pas à pas avec corrections de Wilson et de Newton) permet de calculer en un seul passage la courbe à vide de la machine.

Dans un cas en charge, la méthode reste applicable, et les incréments de charge concernent cette fois les densités de courant rotoriques et statoriques, et l'on ne calcule plus évidemment la courbe à vide.

6. L'INTERPRETATION DES RESULTATS

Le programme de résolution fournit comme seul résultat la valeur du potentiel vecteur et de l'induction en chaque noeud et en chaque point d'intégration. Cela représente une liste impressionnante de résultats, très fastidieux à interpréter. Une manipulation s'imposait, pour fournir automatiquement les courbes et les grandeurs suivantes, qui sont particulièrement significatives :

- le tracé des lignes de flux dans la structure, qui permet d'avoir une bonne vue d'ensemble du problème, et de localiser les zones à forte saturation. Les figures 9 et 10 donnent le tracé des lignes de flux pour un turbo-alternateur de 800 MW ; 12 KV ; 21,3 KA ; $\cos\phi = 0,9$; à vide et en charge.

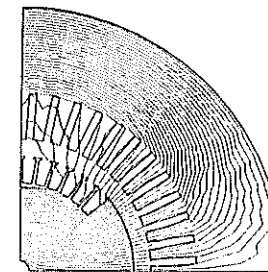


Figure 9



Figure 10

- le calcul et le tracé de la courbe de répartition du potentiel vecteur le long de l'entrefer, et de son onde fondamentale ;
- le calcul et le tracé de la courbe de l'onde fondamentale de la composante radiale de l'induction dans l'entrefer ;
- le calcul de l'induction maximale dans l'entrefer ;
- le calcul du flux utile par pôle et par unité de longueur traversant l'entrefer.

Toute cette étude concerne le fonctionnement à vide ou en charge de la machine.

Pour le fonctionnement à vide, on profite de l'avantage qu'offre la méthode de résolution choisie pour calculer la caractéristique à vide de la machine, comme cela a été expliqué précédemment.

7. LES DONNEES

Toutes les opérations effectuées automatiquement par l'ensemble du programme ne demandent l'introduction que d'un nombre limité de données, classiques pour le constructeur de machines électriques, à savoir :

- le nombre total d'encoches statoriques
- le nombre de paires de pôles
- le nombre de bobines inductrices par pôle
- le nombre de phases du bobinage statorique
- le raccourcissement du pas
- le nombre de circuits en parallèle
- les dimensions principales de la machine (diamètres, largeurs et profondeurs d'encoches)
- la tension, la puissance, le $\cos\phi$, la réactance de dispersion, le courant inducteur

- le code qui permet à l'utilisateur de choisir à priori le nombre de couches du maillage.

Le programme, bien que rédigé en FORTRAN, est général au point de vue du dimensionnement des vecteurs et des matrices : quelle que soit l'application traitée, il gère automatiquement son organisation en mémoire, ce qui, en plus de l'avantage de la souplesse d'emploi, permet d'éviter des manipulations inutiles de vecteurs trop longs.

8. CONCLUSION

Le programme présenté est une solution à l'application de la méthode des éléments finis. Il a pour but d'automatiser au maximum les opérations, et est applicable à un domaine particulier -les turbo-alternateurs- tout en étant suffisamment général pour couvrir tous les cas possibles dans ce domaine. Le maillage proposé vise à optimiser le rapport précision/temps de calcul. Moyennant une adaptation spécifique, la méthode pourrait être appliquée dans le même esprit à d'autres domaines de l'électromagnétisme : alternateurs à pôles saillants, machines à courant continu, transformateurs.

9. BIBLIOGRAPHIE

1. R. LEYVRAZ
Field Calculation by an Automatic and Iterative Grid Generation with Minimum Discretisation Error.
BBC Aktiengesellschaft BROWN BOVERI Zürich.
2. G. FONDER
The Frontal Solution Technique : Principles, Examples and Programs
Internal Report, (1974), University of Wales.
3. S. CESCOTTO, J.-L. LILLEN
Application d'un principe variationnel incrémentiel au calcul par éléments finis de la répartition du champ magnétique dans les machines électriques.
Bulletin Scientifique de l'A.I.M., Liège 1/77
4. P. BRANDL, K. REICHERT, W. VOGT
Simulation du turbo-alternateur en régime de charge stationnaire.
Revue Brown Boveri 9-75 pp. 444 à 449

5. M.V.K. CHARI, P. SILVESTER
Analysis of Turboalternator Magnetic Fields by Finite Elements.
IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems.
Vol. PAS-90, n°2, mars-avril 1971.
6. E.F. FUCHS, E.A. ERDELYI
Non-linear Theory of Turboalternators.
Part I : Magnetic Fields at No-load and Balanced Loads.
IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems.
Vol. PAS-92, pp. 583-591
7. P. RAFINEJAD, J.-L. COULOMB, J.-C. SABONNADIÈRE
Elaboration de modèles informatiques interactifs dans le calcul
de machines à induction.
RGE, Tome 84, n°9, septembre 1975.

AUTOMATIC MESH GENERATION IN MAGNETIC FIELD CALCULATIONS

F. Melkes

Research Institute for Rotating Electrical Machines
Mostecká 26, 65765 Brno, Czechoslovakia

ABSTRACT

The contribution deals with finite element mesh generations emphasizing applications in magnetic field calculations. First a mesh generator classification is introduced. Then two special generators are described. At the end a few examples are given to illustrate the practical use of the automatic mesh generation.

1. INTRODUCTION

The finite element method belongs, for its generality, easy application and simplicity, to numerical methods which are very often used even in nonlinear magnetic field calculations. The finite element process can be carried out in three main steps:

- pre-processing (problem description, data preparation and checking)
- intermediate-processing (numerical computation)
- post-processing (selection, presentation and evaluation of results)

The pre- and post-processings generally require very much user's effort while human activity during the calculating process itself is nearly negligible due to powerful computers and general purpose finite element programs.

The essential pre-processor property of the finite element method consists in subdividing the investigated region into a relatively large number of geometrically simple elements (e.g. triangles and quadrilaterals in the plane or tetrahedrons, pentahedrons and hexahedrons in the space). It is necessary to pay appropriate attention to modelling the mesh for its form affects both the accuracy of the resulting field and the total computing time. This process involves certain user's experience and represents time-consuming, tedious and error-prone work if done manually. Regarding this fact, automation and mechanization is being more frequently applied in the input data preparation. Several labour-saving and error-reducing methods have been recently developed to generate mesh descriptions automatically or semi-automatically.

The aim of this contribution is to describe some mesh generation methods in greater details. First the paper

introduces a classification of mesh generating methods. Afterwards it notes two special ways of generating the triangular meshes which are used in Research Institute for Rotating Electrical Machines, Brno for twodimensional electromagnetic field analysis. Sample problems illustrate practical usage of the generating schemes described.

2. MESH GENERATION CLASSIFICATION

The mesh description consists usually of a few immense data sets which ought to be complete, accurate and unique. The purpose of generating is to minimize manual effort necessary for input data description, save labour and reduce substantially number of errors. The subject of generation is the geometry portion of the problem for the geometry quantities represent major part of the input data. Some generators are equipped with the node numbering which results in an optimal size of the discretization matrix.

According to the hardware equipments used, the generation methods can be divided into two classes, each of them consisting of a few groups. The first class contains computer oriented methods, the other one includes computer-graphics oriented methods. Both classes have their respective advantages.

COMPUTER ORIENTED METHODS need no special peripheral facilities. The mesh is established only by the program processing which requires a minimum amount of digital information. Some of these methods are very simple and rapid but they usually impose various restrictions on a generated mesh.

Regular mesh deformation represents the common idea of the first group. One can simply generate a regular logical mesh in which the investigated domain is approximately shown. This regular mesh is transformed so that the given logical region merges in the real configuration. After the transformation all boundaries between adjoining mediums and the exterior boundary of the complex assume the real sizes and locations but the elements in the individual subregions are deformed in a certain way. The transformed mesh serves as the input for field calculations.

In [17] the author uses the mesh of equilateral triangles and the transformation is defined by partial differential equations. The authors of [3, 6] come out of an elementary region (a unit square or cube) covered by a standardized mesh and transform the region on the investigated domain. The approach described in [15] uses

a square mesh overlapping the given region. A random number generator helps to choose suitable vertices of the constructed triangulation in the square mesh elements. From the vertex set the triangular elements are generated according to a built-in criterion. In [1] the given region is overlapped by a rectangular mesh. The mesh is deformed only in the vicinity of adjoining subregion boundaries. Each quadrilateral is divided into two triangles.

Rough mesh refinement is the main principle employed by the second group. The user defines a rough mesh of macroelements (superelements, geometry elements, blocks, zones) with little data. The macroelements are supposed to lie in one medium. The generally irregular rough mesh is automatically split up into microelements according to a prescribed rule.

The authors of [10, 11] use quadrilateral macroelements which are divided first into small quadrilaterals and then into triangles. The planar macroelements introduced in [8] have boundaries formed by three or four sides of straight or circular shapes. With respect to their boundary types the macroelements are refined similarly as in the previous cases. The scheme in [18] is based on the use of isoparametric curvilinear mapping of zones (quadrilaterals and hexahedrons) which cover the given region. Each zone is located in the common coordinate system. The partition of zones into triangles, and tetrahedrons respectively, is done by means of elementary quadrilaterals, and cuboids respectively. The usage of void zones enables to generate a large variety of meshes.

High-order element use can be regarded as the third group of the computer oriented methods. High-order polynomials approximate the unknown solution better than linear polynomials. A lower number of elements is sufficient for the required accuracy of resulting values. This way makes higher demands on the programmer's work, however, it saves the repeated work of the user. That's why we place it among the generation methods.

In practice various types of high-order elements are applied. From many papers let us quote only [12] where triangles with polynomials up to six order are used in linear magnetic field calculations and [19] where a high-order element family with the Hermite interpolation is described.

COMPUTER-GRAPHICS ORIENTED METHODS belong to the other class. In this case the mesh is established by an online or offline computer graphics. These methods are based on the graphical aspect of the problem. They essentially depend on the hardware equipments which are to the user's disposal. The higher payload on the hardware equipment

is on the other hand compensated by more convenient and first-rate input data description. Data graphically put down can be easily checked, changed, corrected and completed in a visual manner. The corresponding algorithms are usually equipped with a simple language to generate meshes interactively. From a series of solved problems it follows that the offline modelling approach substantially reduces time and costs. According to the used device we can distinguish two groups of these methods.

A graphics tablet characterizes the first group. This equipment enables to digitize the coordinates of the point specified by a cursor. The regions can be digitized in their original sizes. The coordinates of the vertices are digitized directly. The boundary points are determined by redigitizing the corresponding vertices. In the element specification the individual methods differ.

The authors of [5] introduce an algorithm for an automatic triangular mesh generation from the given vertices. They require the triangles to resemble the equilateral ones, to be defined uniquely, to cover all the configuration and to be disjoint. A generalization of this process to more general regions is published in [16]. Usage of a digitizer even in the element definition is described in [9].

A graphical display, connected usually with a minicomputer, is typical for the other group. Its light pen, magnetic pen or cursor makes the generation of vertices, elements and boundary points possible. The minicomputer and a simple interactive language facilitate various mesh manipulations. The meshes can be effectively constructed, deformed, combined, refined, completed, modified, checked, visualized, etc. The resulting mesh is transferred into the central computer processing. Further facilities may be included to match the requirements of the application.

The simple interactive language introduced in [4] serves to effective triangular mesh generations for mechanical engineering purposes. The investigated structure is divided into so called four-sided patches which are triangulated automatically in dependence on the patch type. The interactive data-handling system described in [14] uses three-sided and four-sided patches to create meshes for two- and three-dimensional structures. A very nice interactive mesh generating approach is described in [13]. It facilitates complicated region triangulations needed in magnetic field calculations. In [7] the author constructs meshes via quadrilateral and triangular blocks. [2] presents a relatively large interactive language for generating the surface meshes.

It should be pointed out that the mesh generation clas-

sification mentioned above may not be complete. Now generating schemes can arise when combining the presented methods.

3. TRIANGULAR MESH GENERATIONS

Practice gives the best account of triangular elements for twodimensional problems. These elements enable to model even intricate configurations. Our further considerations will be limited only to triangular meshes with regard to magnetic field calculations. In this case the regions are composed of several different mediums and have mostly complicated shapes.

There are three data sets constituting the generation subject. The first set gives in the vertex coordinates of the considered triangulation. The second one contains triplets of the serial vertex numbers defining the elements. A symbolical description of the corresponding medium is added to each triplet. The third set includes doublets of serial vertex numbers for boundary constraint descriptions. Each doublet is completed by a symbol of the boundary type. These sets sufficiently specify the geometry of the problem investigated. Two special mesh generating approaches will be described in more details.

The first scheme is oriented on a computer. In practice there often occur problems characterized by rectangular regions in a coordinate system (Cartesian, polar) and distinguished in their boundary value conditions. Any region of such a type can be covered with a rectangular mesh by means of a few input values, each elementar oblong being automatically split into two triangles. By means of a short description any material configuration can be defined. A partial configuration can be periodically repeated. Coming out of the electromagnetic field practice a set of typical boundary value problems has been chosen and added to the scheme so that the boundary constraint set can be generated by one symbol only, the boundary constraints being represented by various combinations of Dirichlet, Neumann and periodicity conditions. The corresponding algorithm is very fast. It is determined for analysis of particular problems of electrical machines. In order to be attractive to users it has been built in the main finite element program.

The other way is directed to computer graphics. The main idea consists in interactive work with graphics data sets. Any mesh manipulation causes an alteration in the corresponding data set. To simplify the mesh manipulation the scheme is completed by a simple con-

versational language. Using the language one can construct, define, modify, deform, change, refine, cancel, combine, join, check, correct, move, rotate, mirror image, graphically multiply, copy, draw, visualise the whole meshes or their parts. The relatively large choice of orders puts the user in a position to generate rather complicated meshes on various material configurations.

This scheme combines utilization of both the display and the graphics tablet. Both facilities can be used for taking the mesh objects off, however, the graphics tablet enables specifying the meshes in the original sizes. The display is mostly used for mesh manipulations.

The vertex coordinates are generated directly in the prescribed order. The elements can be defined in three ways: simultaneously with the vertex generating where two nearest and already defined vertices are automatically found by the minicomputer or separately by digitizing an internal point of the corresponding element (e.g. the centre of gravity) or naturally by specifying its three vertices. The boundary points are determined by redefining the respective vertices.

In order to check on the formed triangulation, all vertices, elements and boundary type symbols are immediately plotted on the screen. The check-up on the final mesh consists in drawing the really generated configuration of materials based on the material symbol investigation. This drawing clearly shows most of errors and inaccuracies of the generating process.

4. ILLUSTRATIVE EXAMPLES

First we show the on-line generating scheme having been used in magnetic field analysis of a stator model. One half of the model can be seen in Fig. 2. The triangulation of this region (Fig. 1) consists of 1288 elements being defined by 696 vertices. The number of boundary points with the Dirichlet condition equals to 48. One must write about 6500 input values to describe the complete mesh manually. Usage of the scheme mentioned above requires only 136 quantities for generating the same mesh (29 coordinates for the vertical lines, 24 coordinates for the horizontal ones, 82 for definition of elements and their types, 1 for boundary condition choice). Figure 1 shows the resulting magnetic field distribution.

Now we demonstrate the other scheme being applied in an asynchronous machine with eccentric air gap. The machine has 36 stator and 28 rotor slots. Regarding the

problem symmetry we can investigate one half of the machine cross-section only Fig. 3. First of all we take the triangulation of one stator slot pitch by a digitizer. This local triangulation contains 39 elements. Multiplying it graphically by 18 we obtain the complete stator triangulation having 702 elements. Similarly we can digitize one rotor slot pitch consisting of 40 triangles. After multiplying it by 14 we get the complete rotor triangulation composed of 560 elements. Finally we combine the stator and rotor meshes (Fig. 4) and give an air gap triangulation of 124 elements more, the triangulation being digitized by the graphics tablet. The resultant triangulation counts 1386 elements defined by 732 vertices. Figure 3 shows the check drawing of the final mesh.

The advantage of the introduced way is given by the possibility of creating modifications. One can move the rotor mesh and get the case with eccentricity (Fig. 5). This fact enables to analyse the eccentricity effect on the magnetic field. The magnetic field distribution for 80 percentual eccentricity is introduced in Fig. 6.

Note, that the complete mesh description amounts to more than 7000 inputs while the presented scheme needs approximately 250 digitizing steps and a few interactive language statements.

5. CONCLUSION

The usage of automatic mesh generation schemes enormously advances work in the numerical field analysis. These schemes save time and reduce errors in large data set preparations. Their high efficiency and large variability make the finite element method, and also the finite difference method, more attractive and applicable to praxis.

6. REFERENCES

- [1] Andersen O.W.: Laplacian electrostatic field calculations by finite elements with automatic grid generation, Trans. IEEE T 73 016-3, 1972
- [2] Bailey P., Iveson P.: Offline finite element modeling using an interactive graphics system, Third Int. Conf. on Computers in Eng. and Building Design, CAD 78, Brighton 1978, 767 - 780
- [3] Cook W.A.: Body oriented (natural) coordinates for generating threedimensional meshes, Int. J. Num. Meth. Eng. 8, 1974, 27 - 43
- [4] Dimmer P.R.: GINO-F in interactive finite element mesh generation, Conf. GINO-F Applications, Hatfield Polytechnic, 1976
- [5] Frederic C.O., Wong Y.C., Edge F.W.: Twodimensional automatic mesh generation for structural analysis, Int. J. Num. Meth. Eng. 2, 1970, 133 - 144
- [6] Gordon W.J., Hall Ch.A.: Construction of curvilinear coordinate systems and applications to mesh generation, Int. J. Num. Meth. Eng. 7, 1973, 461 - 477
- [7] Grieger I.: Integrated interactive structural analysis with finite elements, Third Int. Conf. on Computers in Eng. and Building Design, CAD 78, Brighton 1978, 789 - 802
- [8] Jinoch J., Jinoch J.: SAGS - a program for automatic triangular mesh generation using ICL, 1905 (in Czech), Proc. 2nd Sem. on FEM, Plzen 1973, 93 - 96
- [9] Kos M.: Interactive triangular mesh generation by a graphics tablet (in Czech), TES 1978, theor.
- [10] Munro E.: Computer-aided-design methods in electron optics, Ph.D. theses, Univ. of Cambridge, 1971
- [11] Novik Ja.A.: Algorithm of triangular mesh generation for numerical magnetic field calculation by FEM, Sbornik algoritmov i program 4, Riga 1974
- [12] Silvester P.: High-order polynomial triangular finite elements for potential problems, Int. J. Engn. Sci 7, 1969, 849 - 861
- [13] Silvester P.: Draft notes on the MAG-NET system, report, McGill Univ., Montreal, 1975
- [14] Singh S.: A computer-aided finite element idealization and mesh generation system, 2nd Int. Conf. on Computers in Eng. and Building Design, London, 1976, 213 - 218

- [15] Suhura J., Fukuda J.: Automatic mesh generation for finite element analysis, Adv. in Comp. Meth. in Struct. Mechanics and Design, 1972, 607-624
- [16] Ulrych E.: Semi-automatic planar mesh generation for FEM (in Czech), Strojirenství 23, 1973, 278
- [17] Winslow A.M.: Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh, J. of Comp. Phys. 1, 1966, 149 - 172
- [18] Zienkiewicz O.C., Phillips D.V.: An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric coordinates, Int. J. Num. Meth. Eng. 3, 1971, 519 - 528
- [19] Ženišek A.: Interpolation polynomials on the triangle, Num. Math. 15, 1970, 283 - 296

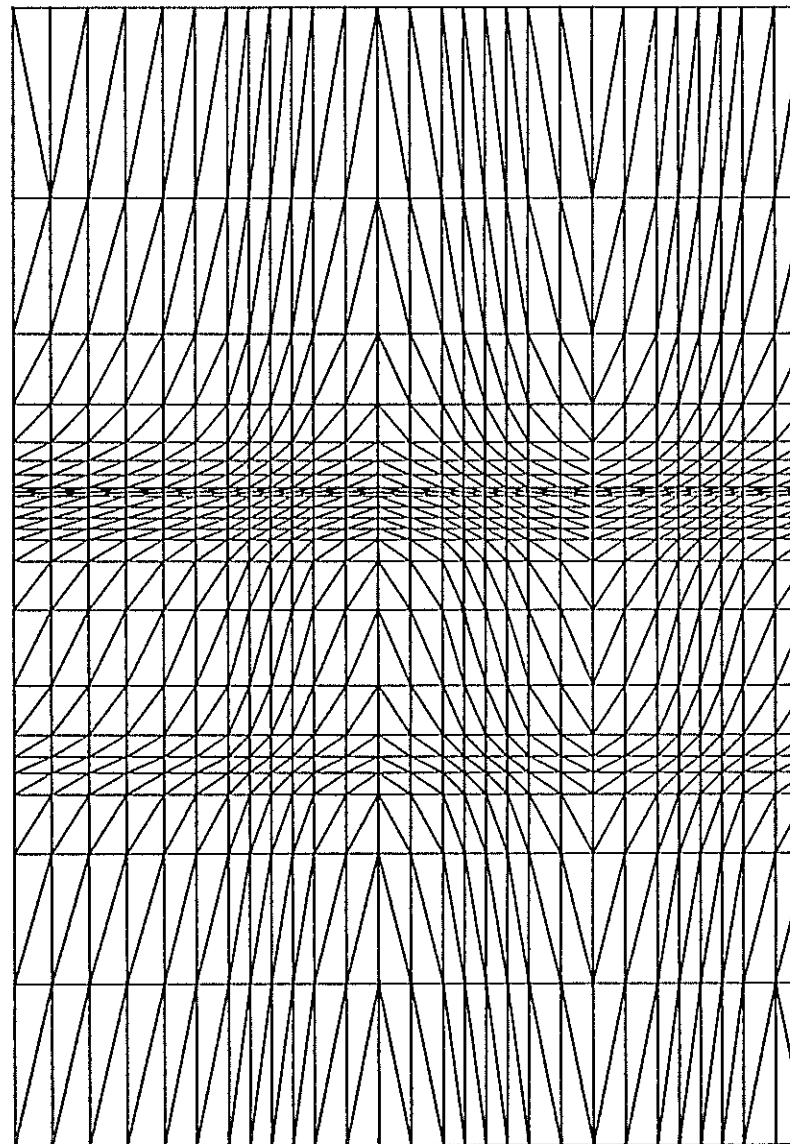


Fig. 1 Static model

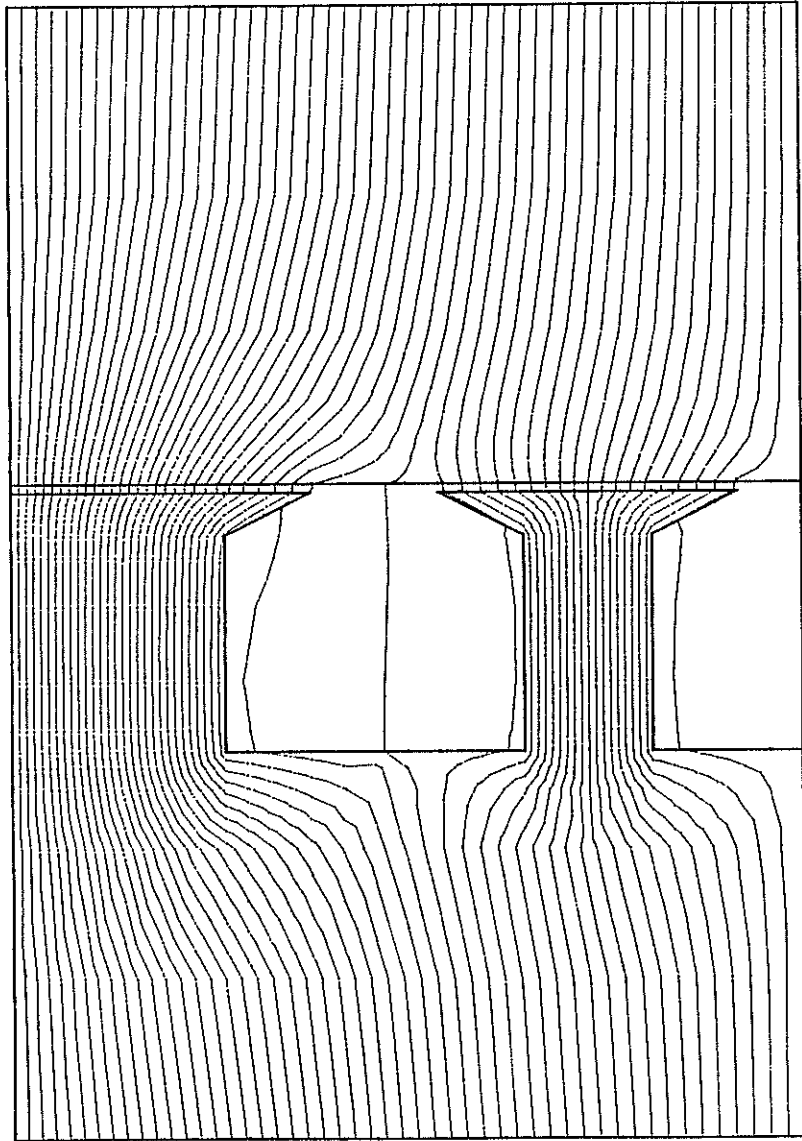


Fig. 2 Static model

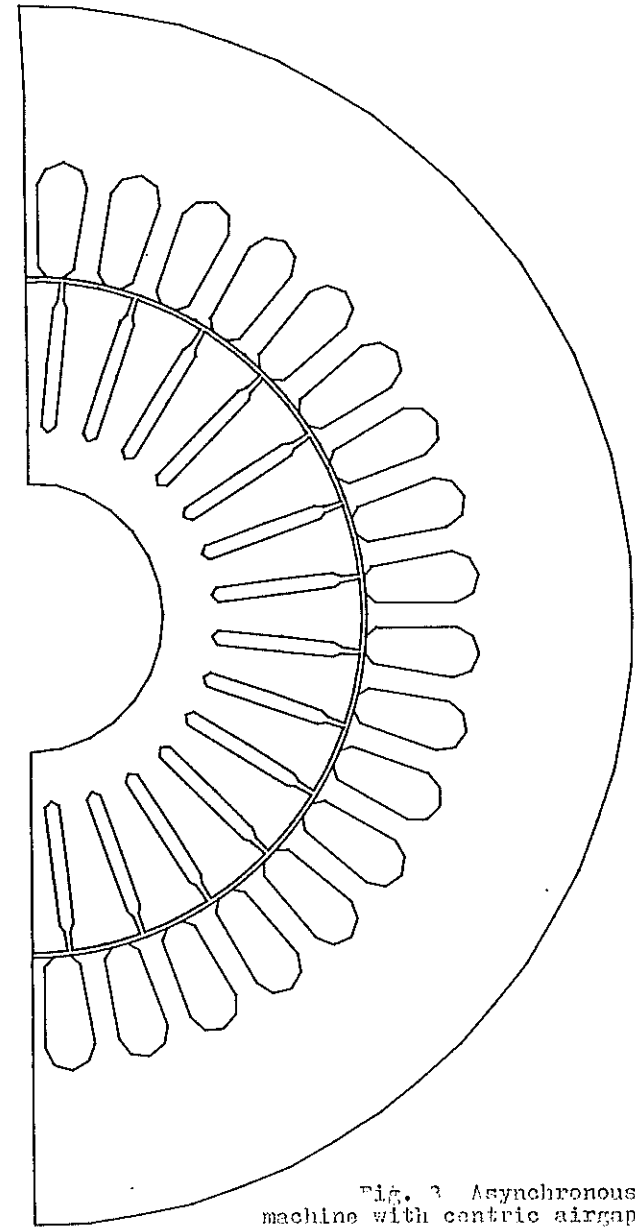


Fig. 3 Asynchronous machine with centric airgap

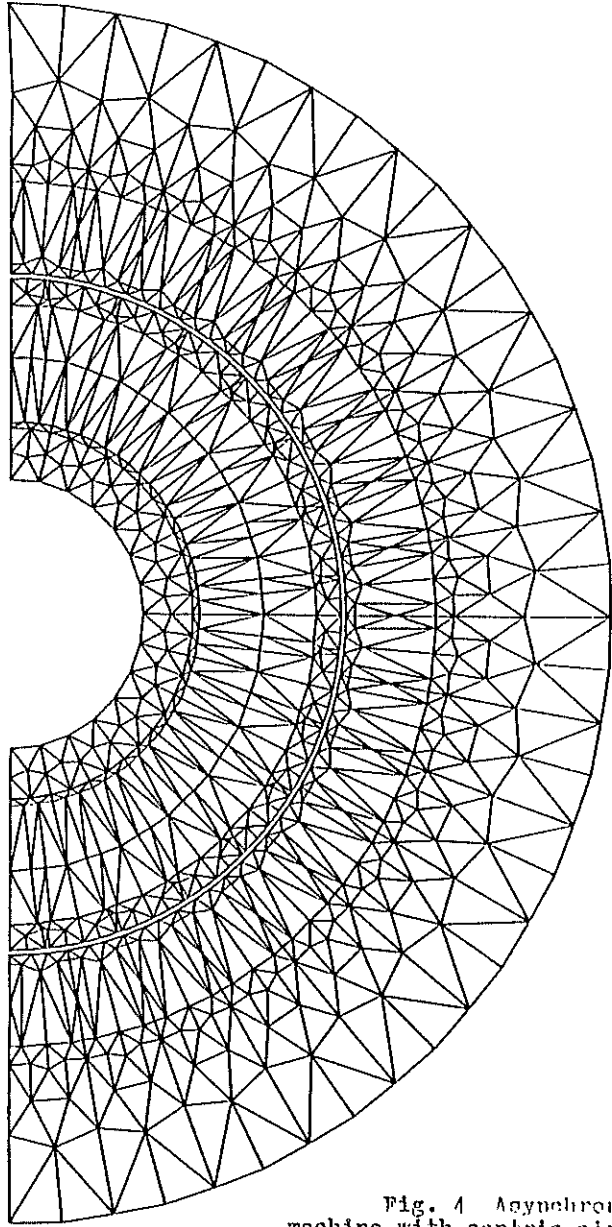


Fig. 4 Asynchronous machine with centric airgap

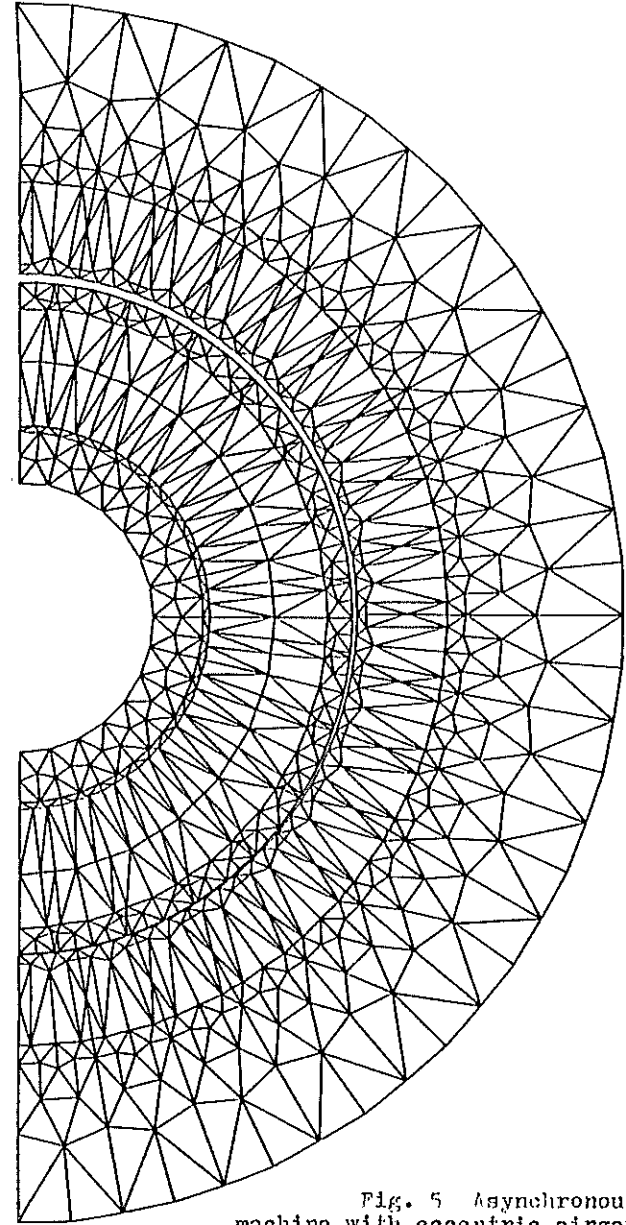


Fig. 5 Asynchronous machine with eccentric airgap

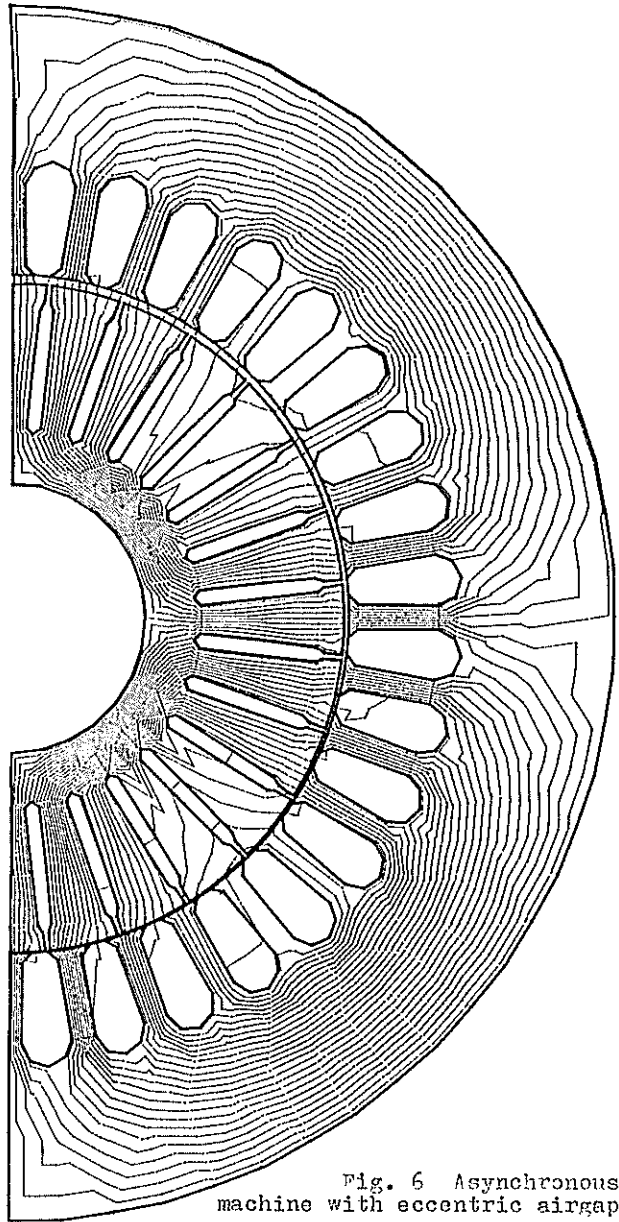


Fig. 6 Asynchronous machine with eccentric airgap

OPTIMISATION D'ENROULEMENTS ADAPTES AUX MESURES DE MAGNETO-OPTIQUE : CAS D'UNE REPARTITION RADIALE OPTIMISEE DE LA DENSITE DE COURANT.

P. BLANCHARD ET M. TEISSIER

Université Lyon 1 - Bâtiment 205 - 43 Boulevard du 11 Novembre 1918
69621 VILLEURBANNE (France)

ABSTRACT

We have studied a resistive ironless DC coil, with rectangular cross section and radial distribution of current density, optimized for the obtainement of the magnetic scalar potentiel difference between two points of the revolution axis.

We have calculated its expression, and we have introduced the factors D and E, homologous to the factors G and F used in the calculation of the central magnetic field.

We presents graphs for constant values of D and E as a function of the coils dimensions.

1 - INTRODUCTION

On étudie des enroulements résistifs à symétrie de révolution, à gorge rectangulaire, constitués par des couches cylindriques coaxiales, portant chacune une densité de courant constante, mais variant d'une couche à l'autre; la loi de répartition de la densité de courant est de la forme $i=i(0;1)f(y)$. Ces enroulements sont envisagés du point de vue de l'optimisation de la différence de potentiel magnétique scalaire (DPMS) entre deux points de l'axe de révolution, symétriques par rapport au centre.

Les notations utilisées sont mentionnées sur la figure 1; il faut y ajouter :

λ : coefficient de remplissage, rapport entre le volume du métal contenu dans une portion de l'enroulement et le volume total de cette portion; on aura donc $\lambda > 1$.

$i(0;1)$: densité de courant dans la spire de coordonnées $x=0$ et $y=y_1$, donc dans la couche cylindrique de rayon y_1 .

ρ : résistivité du métal utilisé.

$U(a_1)$: DPMS entre les points de l'axe de révolution de l'enroulement d'abscisses $-a_1$ et $+a_1$.

Les lettres majuscules représentent les grandeurs sans dimensions suivantes :

$$X_1 = x_1/y_1, Y_2 = y_2/y_1, \text{ et } A_1 = a_1/y_1.$$

On établira la meilleure loi de répartition de la densité de courant possible, c'est-à-dire celle qui, pour une consommation W donnée, produira, avec les hypothèses initiales, la plus forte DPMS entre les deux points d'abscisses $+a_1$ et $-a_1$.

2 - DENSITE DE COURANT OPTIMALE

On impose à toute couche d'avoir une consommation proportionnelle à sa contribution à la DPMS que produit l'enroulement.

Pour une couche cylindrique élémentaire, la DPMS produite entre

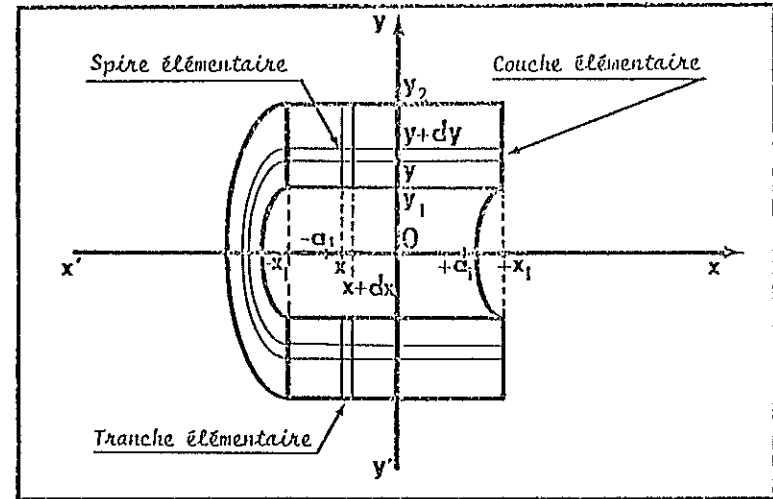


FIGURE 1

les points $-a_1$ et $+a_1$ est :

$$dU(a_1) = \frac{\lambda i(0;1)}{2} f(y) dy \int_{-x_1}^{+x_1} \left\{ \frac{a_1+x}{[y^2+(a_1+x)^2]^{1/2}} + \frac{a_1-x}{[y^2+(a_1-x)^2]^{1/2}} \right\} dx$$

$$= \frac{\lambda i(0;1)}{2} f(y) \left\{ [y^2+(a_1+x_1)^2]^{1/2} - [y^2+(a_1-x_1)^2]^{1/2} \right\} dy$$

pour une puissance consommée :

$$dW = 4 \pi \rho \lambda i^2(0;1) x_1 y f^2(y) dy$$

d'où une "efficacité" :

$$\frac{dU(a_1)}{dW} = \frac{[y^2+(a_1+x_1)^2]^{1/2} - [y^2+(a_1-x_1)^2]^{1/2}}{4 \pi \rho \lambda i(0;1) y f(y)} \quad (1)$$

Pour la couche cylindrique de rayon y_1 , la plus proche de l'axe de révolution, mais aussi la plus "efficace" de toutes, on a :

$$\frac{dU(a_1)}{dW} = \frac{[y_1^2+(a_1+x_1)^2]^{1/2} - [y_1^2+(a_1-x_1)^2]^{1/2}}{4 \pi \rho \lambda i(0;1) y_1} \quad (2)$$

Pour optimiser cet enroulement, on impose à chaque couche cylindrique d'avoir la même "efficacité" que la couche de rayon y_1 , la plus "efficace". Pour cela on égale les relations (1) et (2), d'où l'on tire :

$$i = i(0;1) \frac{y_1}{y} \frac{[y^2+(a_1+x_1)^2]^{1/2} - [y^2+(a_1-x_1)^2]^{1/2}}{[y_1^2+(a_1+x_1)^2]^{1/2} - [y_1^2+(a_1-x_1)^2]^{1/2}}$$

L'étude de cette relation montre que, lorsque a_1 devient très grand, elle tend vers une répartition de Bitter :

$$i = i(0;1)y_1/y$$

Lorsque a_1 devient très petit, elle tend vers la répartition :

$$i = i(0;1) \left[\frac{y_1^2 + x_1^2}{y^2 + x_1^2} \right]^{1/2}$$

Cette dernière répartition a déjà été étudiée tant au point de vue du champ magnétique qu'elle produit en son centre /1//2/, ou le long de son axe de révolution /3/, qu'au point de vue de la DPMS qu'elle produit entre deux points d'abscisses $+a_1$ et $-a_1$ de son axe de révolution /4/.

3 - CALCUL DE $U(a_1)$ ET DE W

$$W = \frac{4\pi\rho\lambda i^2(0;1)x_1 y_1^2}{[y_1^2 + (a_1 + x_1)^2]^{1/2} - [y_1^2 + (a_1 - x_1)^2]^{1/2}} I(a_1)$$

$$U(a_1) = \frac{\lambda i(0;1)y_1}{[y_1^2 + (a_1 + x_1)^2]^{1/2} - [y_1^2 + (a_1 - x_1)^2]^{1/2}} I(a_1)$$

avec :

$$I(a_1) = y_2^2 - y_1^2 + 4x_1^2 \text{Log} \frac{y_2}{y_1} + \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} \left\{ [y_n^2 + (a_1 + x_1)^2] [y_n^2 + (a_1 - x_1)^2] \right\}^{1/2}$$

$$-2(a_1^2 - x_1^2) \text{Log} \frac{(a_1 + x_1)[y_2^2 + (a_1 - x_1)^2]^{1/2} + (a_1 - x_1)[y_2^2 + (a_1 + x_1)^2]^{1/2}}{(a_1 + x_1)[y_2^2 + (a_1 - x_1)^2]^{1/2} + (a_1 - x_1)[y_2^2 + (a_1 + x_1)^2]^{1/2}}$$

$$-2(a_1^2 + x_1^2) \text{Log} \frac{[y_2^2 + (a_1 + x_1)^2]^{1/2} + [y_2^2 + (a_1 - x_1)^2]^{1/2}}{[y_1^2 + (a_1 + x_1)^2]^{1/2} + [y_1^2 + (a_1 - x_1)^2]^{1/2}}$$

4 - DIMENSIONS OPTIMALES DE L'ENROULEMENT

Pour optimiser l'enroulement défini précédemment en fonction de ses dimensions y_1, y_2 et x_1 , pour a_1 donné, on utilise les coefficients sans dimension $E(A_1)$ et $D(A_1)$ /4/ homologues en ce qui concerne la DPMS, aux coefficients G /5/ et F /6/; nous utiliserons aussi le coefficient J /7/.

$$E(A_1) = \left[\frac{\rho U^2(a_1)}{\lambda y_1 W} \right]^{1/2} = \left[\frac{I(A_1)}{4\pi x_1} \right]^{1/2}$$

avec $I(A_1) = I(a_1)/y_1^2$.

L'expression de $E(A_1)$ montre qu'à puissance consommée donnée, la DPMS est d'autant plus grande que $E(A_1)$ est plus grand, et, pour une DPMS imposée, la puissance consommée est d'autant plus faible

que $E(A_1)$ est plus grand : dans tous les cas, le meilleur enroulement est celui qui a $E(A_1)$ maximal.

$$D(A_1) = \frac{U(a_1)}{\lambda i(0;1)y_1^2} = \frac{I(A_1)}{[1 + (A_1 + X_1)^2]^{1/2} - [1 + (A_1 - X_1)^2]^{1/2}}$$

$$J = i(0;1) \left[\frac{\lambda \rho y_1^3}{W} \right]^{1/2} = \frac{[1 + (A_1 + X_1)^2]^{1/2} - [1 + (A_1 - X_1)^2]^{1/2}}{[4\pi x_1 I(A_1)]^{1/2}}$$

Ces coefficients permettent d'apprécier la densité de courant $i(0;1)$ soit à puissance consommée donnée pour J , soit à DPMS imposée pour $D(A_1)$.

Le calcul montre que, pour A_1 donné, $E(A_1)$ est optimal pour Y_2 infini, et pour une valeur finie unique de X_1 . Le tableau suivant donne, pour quelques valeurs de A_1 , les valeurs optimales de $E(A_1)$ et la valeur correspondante de X_1 .

A_1	$E(A_1)$	X_1
10	2.469	10.67
20	4.031	20.61
30	5.300	30.59
40	6.400	40.57
50	7.393	50.56
60	8.307	60.56
70	9.159	70.55
80	9.960	80.55
90	10.721	90.55

Pour la valeur particulière $A_1 = 50$, nous avons représenté sur la figure 2, en fonction de X_1 et de Y_2 , des courbes $E(50) = \text{constante}$. Chacune de ces courbes $E(A_1) = \text{constante}$ possède deux asymptotes verticales qui correspondent à chaque branche de la courbe considérée. Pour $E(50) = 7$, les asymptotes sont $X_1 = 42$ et $X_1 = 64.5$ (figure 3).

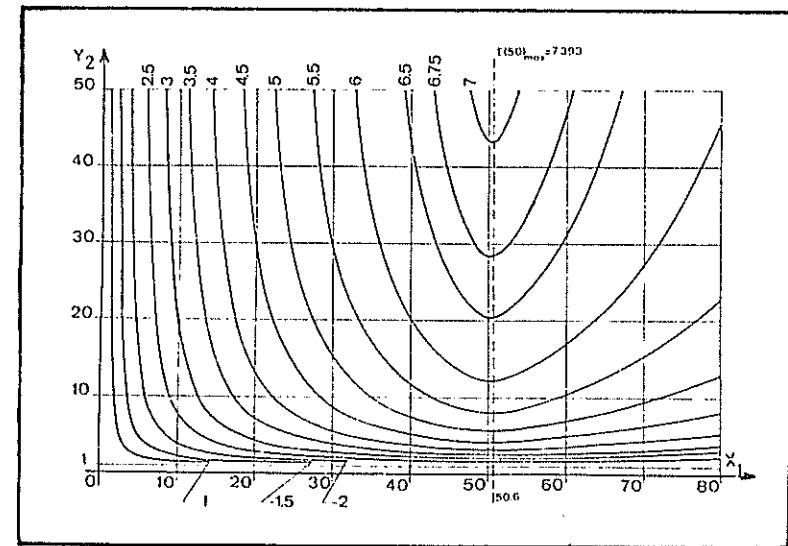


FIGURE 2

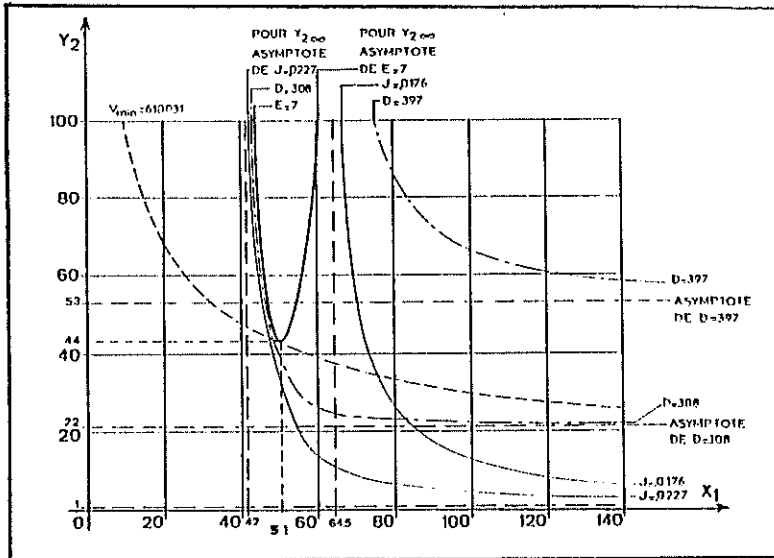


FIGURE 3

5 - ETUDE D'UNE COURBE $E(A_1) = \text{CONSTANTE}$

Lorsque $y_2 \rightarrow \infty$, l'expression de $I(a_1)$ tend vers une limite finie :

$$I(a_1)_{lim} = 2(a_1^2 + x_1^2) \log \frac{[y_1^2 + (a_1 + x_1)^2]^{1/2} + [y_1^2 + (a_1 - x_1)^2]^{1/2}}{2y_1} - 2(a_1^2 - x_1^2) \log \frac{(a_1 + x_1)[y_1^2 + (a_1 - x_1)^2]^{1/2} + (a_1 - x_1)[y_1^2 + (a_1 + x_1)^2]^{1/2}}{2a_1 y_1} - \frac{1}{2} \left\{ [y_1^2 + (a_1 + x_1)^2]^{1/2} - [y_1^2 + (a_1 - x_1)^2]^{1/2} \right\}$$

A cette valeur de $I(a_1)$ correspondent $E(A_1)_{lim}$, $D(A_1)_{lim}$, et J_{lim}

1° Pour une valeur donnée de A_1 , il existe une valeur finie X_1^* de X_1 et une seule pour laquelle $E(A_1)_{lim}$ prend une valeur maximale $E(A_1)_{max}$

2° Pour toute constante k telle que $0 < k < E(A_1)_{max}$ la relation

$$E(A_1) = k$$

est vérifiée pour deux valeurs finies X_1' et X_1'' de X_1 , qui définissent les asymptotes verticales.

Dans le système d'axes (X_1, Y_2) sur chaque courbe $E(A_1) = \text{constante}$ existent deux points pour lesquels $i(0;1)$ est extrémal. Graphiquement cela se traduit par le fait que les courbes $D(A_1) = \text{constante}$ et $J = \text{constante}$ relatives à ces valeurs de $i(0;1)$ sont tangentes à $E(A_1) = \text{constante}$ aux points correspondant à $i(0;1)$ extrémaux.

Dans le cas de l'enroulement envisagé, ces points de tangence sont obtenus pour Y_2 infini, c'est à dire que les courbes $D(A_1) = \text{cte}$ et $J = \text{cte}$ extrémales ont même asymptotes verticales que les branches de la courbe $E(A_1)$ correspondante, comme le montre la figure 3.

Lorsque $X_1 \rightarrow \infty$, les courbes $J = \text{cte}$ ont pour asymptote horizontale $Y_2 = 1$; chaque courbe $D(A_1) = \text{cte}$ a une asymptote horizontale donnée par la relation :

$$Y_2 = \exp \frac{D(A_1)}{2A_1}$$

Si on considère l'ensemble des enroulements correspondants, pour A_1 donné, à $E(A_1) = k$, on constate qu'il peuvent se classer par couples ayant des X_1 et des Y_2 différents, mais ayant même volume rapporté à X_1 et Y_2 :

$$V = 2\pi X_1 (Y_2^2 - 1)$$

sauf un seul qui a la plus petite valeur possible du volume, V_{min} . Graphiquement, toute courbe $E(A_1) = k$ est coupée en deux points min par toute courbe $V = k' > V_{min}$, et la courbe $V_{min} = \text{cte}$ est tangente à $E(A_1) = \text{cte}$.

La figure 3 représente $E(50) = 7$, avec ses deux asymptotes verticales $X_1' = 42$ et $X_1'' = 64.5$. On a aussi représenté les courbes $J = 0.176$ et $J = 0.227$, ainsi que les courbes $D(A_1)_{min} = 308$ et $D(A_1)_{max} = 397$, avec leurs asymptotes $Y_2' = 22$ et $Y_2'' = 53$.

On a fait figurer également la courbe $V_{min} = 61031$ tangente à $E(50) = 7$ au point $(X_1 = 51; Y_2 = 44)$.

6 - REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient Monsieur le Professeur F. Gaume pour ses précieux conseils.

7 - REFERENCES

- /1/ - F. Bitter - Rev. Sci. Instr. - 7/12 - 1936 - p. 482/487.
- /2/ - F. Gaume - Journ. des Recher. CNRS - 9/43 - 1958 - p. 93/115.
- /3/ - P. Blanchard, M. Jacobzone - Proc. of 5° TECHNOMAG, Frascati (Italy) - 21/25 April 1975 - p. 427/428.
- /4/ - P. Blanchard, M. Teissier - C. R. Acad. Sci. Paris - série B - t. 283 - 1976 - p. 99/102.
- /5/ - C. Fabry - L'Eclairage Electrique - XVII/43 - 1898 - p. 133/141.
- /6/ - D.B. Montgomery - Solenoid Magnet Design - Wiley Interscience - 1969.
- /7/ - W.F. Gauster - AIEE fall General Meeting - 11/16 October 1959 - Chicago (USA) - Conf. paper 59-1235.

THE USE OF SPATIAL FOURIER TRANSFORMS AND PARSEVAL'S
IDENTITY IN THE CALCULATION OF ELECTROMAGNETIC FORCES IN
LINEAR INDUCTION DEVICES

E.M. Freeman and C. Papageorgiou
Department of Electrical Engineering,
Imperial College, Exhibition Road, London, SW7 2BT

ABSTRACT

The application of Fourier transform theory to the study of multi-layer linear induction devices having excitation windings of finite extent is described. By employing a transmission line analogue in Fourier space and Parseval's identity it is shown that the problem can be greatly simplified. The method is illustrated by describing its application to the superconducting dynamic levitation problem.

1. INTRODUCTION

There is now a very large body of literature concerned with the analysis of linear induction devices, such as linear induction motors and superconducting dynamic levitation systems. The analytical techniques employed are many and varied, see for example the references listed in reference 1. In that paper a Fourier transform method was described which could account for longitudinal edge effects in models having no field variation transversely. The basic method was well known, it had already been employed by others, including Yamamura². The novel element was the use of the Fourier spectra as an aid to design and the emphasis on the use of Parseval's identity to reduce the effort required to calculate forces and power. More recently a further extension of the theory was described³ which could accommodate multi region models using a transmission line analogue.

In this paper the theory is extended further to allow for finite width coils and current sheets. While this still does not accurately model linear induction motors it does provide a useful first step towards the analysis of superconducting levitation devices. Furthermore the theory, as outlined here, is required for the next stage in the development of the work which will accommodate finite width conductors and iron regions. This is to be described shortly elsewhere.

The Fourier transform method, as applied to superconducting levitation devices, has already been used successfully by several authors⁴⁻⁶. However, in all cases the algebra tends to be lengthy and tedious, whereas with the techniques described here, more complex models may be studied, and great economy of effort is possible, together with the possibility of an improved understanding of the phenomena involved. In earlier work, it was quite common to use electric field strength, E, and a tangential magnetic field strength, H, as analogues of the voltage and current in a transmission line. In this paper the transformed quantities would of course be used rather than the real quantities. However, such a

step leads to difficulties in the study of superconducting levitation devices where it would be more natural to use normal flux density, B, rather than E. Consequently, in the following the transformed field quantities B and H will be used as analogues of voltage and current respectively.

The method described below is extremely simple to apply and has been used in a variety of model studies with some success. In section 5, as an example, the application of the theory to a superconducting coil moving above a conducting sheet is described.

2. THE "THREE-DIMENSIONAL" MODEL AND EQUIVALENT CIRCUIT

The term "three-dimensional" is much over-used in the linear induction motor literature. It is very frequently used to describe theoretical LIM models where the field varies sinusoidally in two directions, with an unknown variation in the third direction. The material properties are permitted only to vary in that third direction. The model is nonetheless useful, in that it does permit an approximate estimate of the performance to be determined. In this paper the equivalent model in Fourier transform space will be described. The method does, however, have the additional advantage that it can be extended to accommodate finite machine width and/or length.

The model adopted for this analysis consists of a set of homogeneous parallel layers having different electromagnetic properties, in general, and travelling at different velocities in the x-direction, if so required. The constraint is made that no two conducting layers may be in sliding contact. All induced currents are assumed to lie in the x-z plane, i.e. the normal current density is taken to be zero.

In the general case an excitation winding may exist between any two layers. In the example described here only one excitation winding layer will be assumed. All non-linear magnetic effects are neglected, as are displacement currents. A typical region, or layer, is shown in Fig. 1, it may be thought of as one of a set representing the various regions in an induction device.

From equations (A3) it can be seen that the transformed field quantities B and H_x are linked by two equations which are similar to the well known transmission line equations. It follows that each layer in the model can be represented by a section of transmission line in which the voltage and current represent B and H_x respectively. Such a line has a characteristic impedance given by:

$$Z = j\mu(a^2 + b^2)/ay \quad (1)$$

and a propagation constant γ , where:

$$\gamma^2 = (a^2 + b^2 + j\mu(av + \omega)) \quad (2)$$

In turn, the transmission line can be modelled by a two-port, three impedance network, as shown in Fig. 2.

The impedances Z_A and Z_B are given by:

$$\left. \begin{aligned} Z_A &= Z \tanh(0.5\gamma d) \\ \text{and } Z_B &= Z/\sinh(\gamma d) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

The complete model can be represented by a set of such networks in cascade, as shown in Fig. 3. The input to the circuit is provided by the current generator, $-I_z$. The extreme end regions are modelled by infinitely long transmission lines and so they can be represented by single impedances equal to the appropriate characteristic impedances.

Thus the otherwise fairly complex problem of determining the transformed field quantities at any interface has been reduced to a relatively simple exercise of finding the "voltages" and "currents" along a transmission line. It should be remembered that it will be necessary to perform this simple calculation for a number of a and b values.

At this point it is useful to stop and consider carefully what is required. If the real field quantities are really necessary then some form of inverse transformation will have to be used. The present authors favour a numerical rather than an algebraic inversion⁹.

On the other hand, if forces or power flows are to be determined, then inversion is totally unnecessary. These can be easily obtained by applying Parseval's identity. This is done in the next section.

3. USE OF PARSEVAL'S IDENTITY

This has been described in other papers by the present authors^{1,3} for simpler models involving only a single transform. For a double transform the identity may be written in the form:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y, z) B^*(x, y, z) dx dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(a, y, b) B^*(a, y, b) da db/4\pi^2 \quad (4)$$

where $A(x, y, z)$ and $B(x, y, z)$ are real quantities and $A(a, y, b)$ and $B(a, y, b)$ are the transformed quantities.

This relationship greatly simplifies the problem of determining forces and power flow, as can be seen by applying the Maxwell stress tensor¹⁰ and the Poynting vector.

The time average forces, acting at the surface of a layer may be written:

$$F_x = 0.5 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B H_x^* da db/4\pi^2 \quad (5)$$

$$F_z = -0.5 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B H_z^* da db/4\pi^2 \quad (6)$$

$$\text{and } F_y = 0.25\mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (|B/\mu_0|^2 - |H_x|^2 - |H_z|^2) da db/4\pi^2 \quad (7)$$

where B , H_x and H_z are the transformed field quantities determined using the model transmission line. Note that a positive value of F_y indicates an attraction force.

Similarly, applying the Poynting vector, the complex power flow is given by:

$$S = 0.5 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (E_z H_x^* - E_x H_z^*) da db/4\pi^2 \quad (8)$$

and using equations (A3) this may be rewritten as:

$$= 0.5 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega/a) B H_x^* da db/4\pi^2 \quad (9)$$

The real part will give the time average power, P , entering the region and the imaginary part, Q , will give the time average reactive power. The total complex power in a region is of course determined by calculating the difference between the complex powers entering and leaving that region.

The double infinite integrals can be calculated using standard computer techniques. It is helpful to remember that the integrands rapidly go to zero outside a limited region around the natural wave numbers of the system under examination.

It is important to note that the above expressions must be multiplied by two if d.c. magnitudes are used in place of the a.c. peak values.

4. TWO-DIMENSIONAL EXCITATION

It is assumed that the winding exciting the model can be represented by a two-dimensional current sheet, i.e. it has no thickness in the y -direction. The two components of line current density $K_x(x, z)$ and $K_z(x, z)$ are linked by the continuity equation:

$$\frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

The two components are not independent and use was made of this fact in the equivalent circuit described above, in which it is necessary

to use only the Fourier transform of one component. This was chosen to be $I_z(a, b)$. A method will now be described for determining $I_z(a, b)$ produced by a general form of closed loop winding. Note that the Fourier transform of the continuity equation may be written:

$$j a I_x(a, b) + j b I_z(a, b) = 0 \quad (11)$$

Hence if $I_z(a, b)$ is known, then $I_x(a, b)$ is also known.

Referring to Figs. 4 and 5, at the point (x_1, z_0) the current flows through an element of width $2\Delta x_1$ in the x-direction. The line current density in the z-direction is therefore:

$$I/2\Delta x_1 \quad \text{for} \quad (x_1 - \Delta x_1) < x < (x_1 + \Delta x_1)$$

A similar argument applies at the point (x_2, z_0) , but the current is reversed, line current density is therefore:

$$- I/2\Delta x_2 \quad \text{for} \quad (x_2 - \Delta x_2) < x < (x_2 + \Delta x_2)$$

Outside the conductor the line current density will be zero.

The Fourier transform in the x-direction is given by

$$\begin{aligned} I_z(a, z_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_z(x, z_0) \exp(-jxa) dx \\ &= I \left[\frac{\sin(a\Delta x_1)}{(a\Delta x_1)} \exp(-jax_1) - \frac{\sin(a\Delta x_2)}{(a\Delta x_2)} \exp(-jax_2) \right] \end{aligned}$$

In almost all instances $(a\Delta x_1)$ and $(a\Delta x_2)$ are much smaller than unity so that the above expression may be simplified to:

$$I_z(a, z_0) = I(\exp(-jax_1) - \exp(-jax_2)) \quad \text{for} \quad -z_1 < z_0 < z_2$$

and $= 0$, outside this range.

Hence, applying the Fourier transform in the z-direction:

$$\begin{aligned} I_z(a, b) &= \int_{z_1}^{z_2} K_z(a, z_0) \exp(-jz_0 b) dz_0 \\ &= I \int_{z_1}^{z_2} (\exp(-j(F_1(z)a + zb)) - \exp(-j(F_2(z)a + zb))) dz \end{aligned}$$

If a winding is formed by n such loop conductors, its total Fourier excitation will be given by:

$$\sum_{k=1}^n I_{k,z}(a, b),$$

where $I_{k,z}(a, b)$ is the excitation of the k^{th} loop.

5. ELECTRODYNAMIC SUPERCONDUCTING LEVITATION DEVICES

One important area in which the theory described here can be applied is that which includes superconducting levitation devices. The principle is well known. A set of coils carrying d.c. current is moved above a conducting sheet. The resulting eddy currents can produce lift, drag and sideways force. These correspond to F_y , F_x and F_z , respectively in section 3, above. The frequency is of course set to zero. The theory is thus quite general and can be applied to both a.c. and d.c. problems. This is particularly helpful when studying the a.c. modelling of d.c. levitation devices and the multilayer induction problem which occurs when studying flow detectors and proximity devices, e.g. see Hammond¹¹ and Dodds¹².

As an example of the application of the theory to superconducting levitation devices a study was made of the lift and drag forces produced by coils having a constant length of perimeter. Four such coils were examined, three rectangular and one circular. The coil details were as follows:

Coil	Length (x-dir ⁿ)	Width (z-dir ⁿ)	Diameter
A	0.2 m	0.6 m	-
B	0.4 m	0.4 m	-
C	0.6 m	0.2 m	-
D	-	-	1.6/π m

The coils could move in the x-direction 0.1 m above an aluminium secondary sheet of infinite extent and thickness d . The current in the coil was 10^5 A and the conductivity of the aluminium sheet was 2.066×10^7 S.

Figs. 6 and 7 show the lift and drag forces against velocity for the four coils moving above a sheet of thickness 0.005 m. The results suggest that the rectangular coils produce the smallest lift and drag forces at high velocities, whilst the circular coil produces the largest. Although not shown here, it is also interesting to note that the lift/drag ratio is almost the same for all four coils, for that particular secondary thickness.

In almost all such levitation systems it is important to obtain the largest lift/drag ratio. Fig. 8 shows the variation of that ratio for the square and circular coils at different velocities, plotted against secondary conductor thickness, d . As might be expected, the ratio becomes independent of the thickness at a value which decreases with increasing velocity. As a rough rule of thumb, the thickness at which that occurs is approximately two classical skin depths, 2δ , where δ is calculated using:

$$\delta = (2/\sigma\mu_0\omega)^{0.5}$$

σ = conductivity of track

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \text{"equivalent" fundamental frequency} = v/2t$$

and t = length of coil in x-direction, or diameter.

It is also interesting to note from Fig. 8 in the region of greatest interest, i.e. up to the 2δ point, that the differences between the two sets of curves are almost negligible.

The theory described in this paper is quite general in that the coil current may be a.c. or d.c. There are papers in the literature which describe an impedance modelling technique, see for example Rhodes et al.¹³. In that technique a stationary coil excited with a.c. is used to model a moving coil excited with d.c. The "equivalent" frequency is determined using the expression given above. Fig. 9 shows the lift and drag forces for the square coil, coil B, excited by a.c. when stationary and d.c. when moving with velocity, v . As might be expected¹³ the calculated forces only approach the same values at high velocity (frequency). The lift/drag ratios, however, are almost identical. It is important to emphasise that the forces were calculated using equations (5) and (7), and not the rate of change of inductance method. These points are to be discussed elsewhere at a later date.

6. CONCLUSIONS

A theory has been described, based on the Fourier transform, which greatly simplifies the study of induction devices composed of multiple homogeneous planar layers excited by two-dimensional current sheets. The resulting equivalent circuit, of transmission line form, yields numerical values for the field quantities in transformed space. It has been shown that it is unnecessary to apply the inverse Fourier transform unless the real field quantities are specifically required. If the forces or complex power flow are to be determined, then these can be obtained by making use of the Parseval identity. The method has been illustrated by applying it to the problem of a superconducting coil moving above an infinitely wide conducting sheet.

In conclusion it should be mentioned that the technique has now

been extended to deal with problems in which the planar layers are of finite extent. It is intended to report on this aspect of the work shortly elsewhere.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to thank the Hellenic Republic State Scholarships Foundation for providing financial support for C. Papageorgiou.

8. REFERENCES

1. Freeman, E.M. and Papageorgiou, C. Spatial Fourier transforms - a new view of end effects in linear induction motors. Proc. IEE, 125, (8), 747-753, 1978.
2. Yamamura, S. Theory of Linear Induction Motors, (Wiley 1972).
3. Papageorgiou, C. and Freeman, E.M. The application of Fourier transform spectra to the study of linear induction motors. International Machines Conference, Brussels, 1978.
4. Urankar, L. and Miericke, J. Forces on null-flux magnetic levitation systems. J.Appl.Phys, 44, (4), 1907-1908, 1973.
5. Miericke, J. and Urankar, L. Theory of electrodynamic levitation with a continuous sheet track - Pt I. Appl.Phys. 2, 201-211, 1973.
6. Urankar, L. and Miericke, J. Theory of electrodynamic levitation with a continuous sheet track - Pt II. Appl.Phys.3, 67-76, 1974.
7. Urankar, L. and Miericke, J. Forces on arbitrary plane multiple excitation current systems used in magnetic levitation. Siemens Forsch. - u. Entwickl. - Ber. Bd., 3, (3), 1974.
8. Reitz, J.R., Borcherts, R.H. and Davis, L.C. Magnetic forces on a coil moving above a conducting plate. Ford Motor Company, Dearborn, Michigan 48121.
9. Bergland, G.D. A guided tour of the fast Fourier transform. IEEE Spectrum, (6), 41-52, 1969.
10. Carpenter, C.J. Surface-integral methods of calculating forces on magnetised iron parts. Proc. IEE, 107C, 19-28, 1960.
11. Hammond, P. Calculation of the magnetic field of rotating machines, Pt 3 - Eddy currents induced in a solid slab by a circular current loop. Proc. IEE, 109C, 508-515, 1962.
12. Dodds, C.V. Solutions to electromagnetic induction problems. Ph.D. Thesis, University of Tennessee, 1967.
13. Wong, J.Y., Mulhall, B.E. and Rhodes, R.G. The impedance modelling technique for investigating the characteristics of electrodynamic levitation systems. J. Phys. D : Appl. Phys., 8, 1948-1955, 1975.

9. APPENDICES

Appendix 9.1 Fourier treatment of the Maxwell equations

The Maxwell equations may be written for the linear induction device, excited at constant frequency, as:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{E} &= -j\omega\bar{B} \\ \nabla \times \bar{B} &= \mu\sigma(\bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}) \\ \text{and } \bar{E}' &= \bar{E} + \bar{V} \times \bar{B} \end{aligned}$$

The relativistic electric field component E'_y is assumed to be zero, i.e. no current flows in the y-direction and there is one component of velocity, that in the x-direction, v. Hence:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= (E_x, E_y, E_z) \\ \bar{E}' &= (E_x, E_y - v\mu H_z, E_z + vB) \\ \bar{B} &= (\mu H_x, B, \mu H_z) \\ \bar{V} &= (v, 0, 0) \end{aligned}$$

Note that B_y is simply written as B.

The condition $E'_y = 0$ means that:

$$E_y = v\mu H_z$$

The other phasor field quantities are linked as follows:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu H_z \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega B \\ \frac{\mu\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} &= \mu\sigma E_x \\ \frac{\mu\partial H_x}{\partial z} - \frac{\mu\partial H_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\mu\partial H_x}{\partial y} &= \mu\sigma(E_z + vB) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Applying a double Fourier transform to the above set of equations yields a further set of equations which link the field quantities in the transformed space. In this appendix the same symbols will be used for the real and transformed quantities, e.g.

$$\Lambda(a, y, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(x, y, z) \exp(-j(ax+bz)) dx dz \quad (\text{A.2})$$

Hence after some algebra, the transformed quantities are related as follows:

$$\left. \begin{aligned} E_y &= v\mu H_z \\ H_z &= bH_x/a \\ E_x &= -(av + \omega)B/(a^2 + b^2) \\ E_z &= (-b^2v + a\omega)B/(a^2 + b^2) \\ \frac{\partial B}{\partial y} &= -j\mu(a^2 + b^2)H_x/a \\ \text{and } \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -\gamma^2 Ba/(j\mu(a^2 + b^2)) \\ \text{where } \gamma^2 &= a^2 + b^2 + j\mu\sigma(av + \omega) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Appendix 9.2 The boundary conditions

It is assumed that the line current density can be represented by the vector $\bar{K}(K_x, K_z)$. It follows from Ampère's Law that the tangential components of H_x and H_z (in Fourier space) are linked by the relationships:

$$\left. \begin{aligned} -H_{u,x} + H_{l,x} &= I_z \\ \text{and } H_{u,z} - H_{l,z} &= I_x \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

where u and l denote upper and lower respectively and I_x and I_z are the Fourier transforms of K_x and K_z respectively.

Since $\nabla \cdot \bar{K} = 0$, $aI_x + bI_z = 0$, and remembering that $H_z = bH_x/a$, the two relationships may be reduced to one. The first will be used in the main body of the paper.

The second boundary condition simply links the normal flux density on either side of a boundary, $B_u = B_l$.

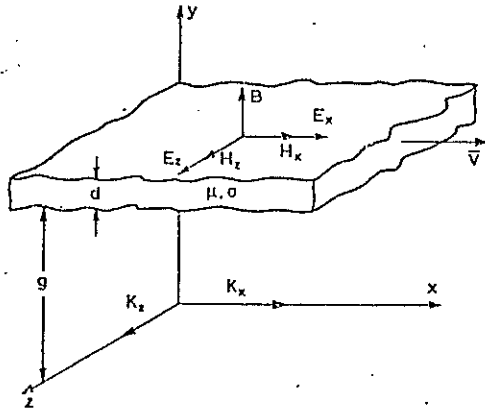


Fig. 1 A typical region moving with velocity, v , above a current sheet.

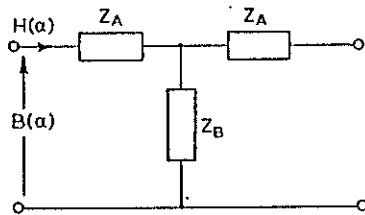


Fig. 2 A two-port network representing a region.

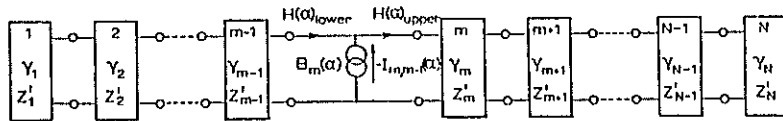


Fig. 3 Complete transmission line representing an N-region model.

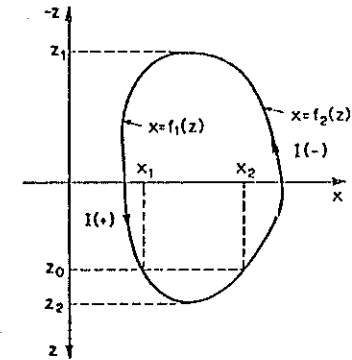


Fig. 4 A typical closed current carrying loop.

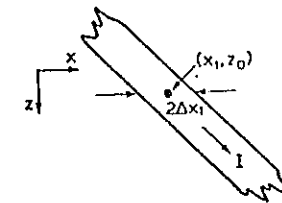


Fig. 5 Magnified view of the current element at (x_1, z_0) .

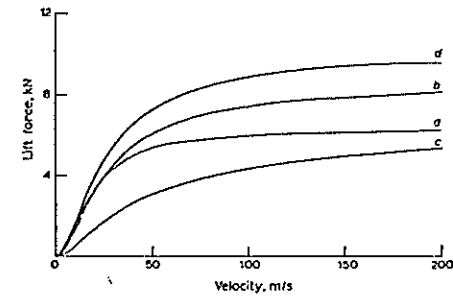


Fig. 6 Lift force against velocity for the four coils.

a Coil A , c Coil C
b Coil B , d Coil D

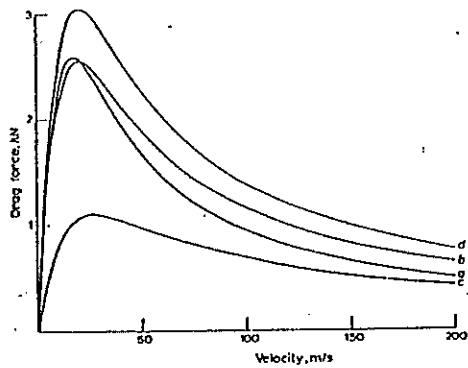


Fig. 7 Drag force against velocity for the four coils.

a Coil A , c Coil C
b Coil B , d Coil D

Fig. 8 Lift/drag ratio against track thickness for four velocities.

--- circular coil
— square coil

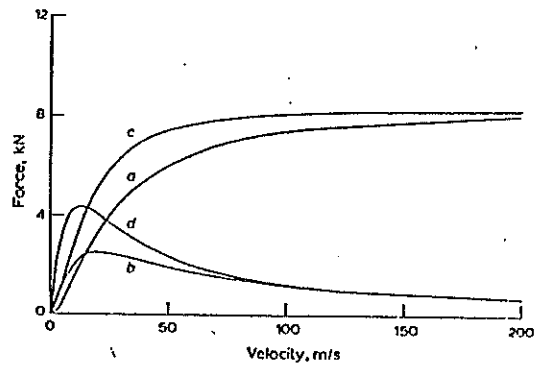
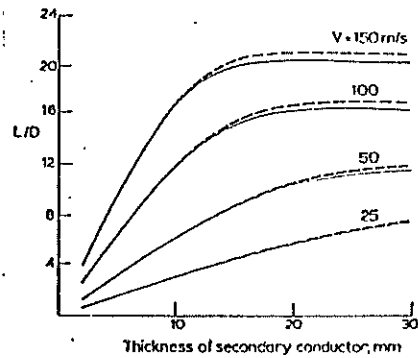


Fig. 9 Lift and drag forces for coil B.

a lift force d.c. moving c lift force a.c. stationary
b drag force d.c. moving d drag force a.c. stationary